[P1] Die *Bornschen Näherung* für die (elastische) Streuung lautet in erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi m^2}{\hbar^4}\frac{1}{(2\pi)^3}\left|\int \mathrm{d}^3x\, V(\vec{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vec{x}\cdot(\vec{k}_i-\vec{k}_f)}\right|^2 , \qquad |\vec{k}_i| = |\vec{k}_f| = k\,. \tag{$*$}$$

Also ist der differentielle Wirkungsquerschnitt einfach gegeben durch die Fouriertransformierte $\mathcal{F}V$ des Potentials V, genommen am Wert des Impulsübertrages, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi m^2}{\hbar^4}\left|(\mathcal{F}V)(\vec{q})\right|^2 , \qquad \vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f\,.$$

(1) Zeigen Sie für den Impulsübertrag, daß $|\vec{q}| = 2k\sin\frac{\vartheta}{2}$ ist, mit ϑ dem Streuwinkel.
(2) Führen Sie für ein radialsymmetrisches Potential die Winkelintegration in ($*$) aus:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4m^2}{\hbar^4}\frac{1}{|\vec{q}|^2}\left|\int_0^\infty \mathrm{d}r\, rV(r)\sin(r|\vec{q}|)\right|^2 .$$

(3) Betrachten Sie ein Yukawapotential $V(r) = \frac{\kappa}{r}\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}$. Zeigen Sie mit (2), daß

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\kappa}{4E\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}}\right)^2 .$$

(4) Welche berühmte Formel ergibt sich aus (3) im Grenzfall des Coulombpotentials? Wie tritt $\hbar$ auf? Diskutieren Sie das Verhalten bei Vorwärtsstreuung.
(5) Zeigen Sie für ein Glockenpotential $V(r) = V_0\exp(-\frac{1}{2}(\frac{r}{r_0})^2)$, daß

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi m^2 r_0^6 V_0^2}{\hbar^4}\mathrm{e}^{-4k^2r_0^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} .$$

Wie verhält sich dieser Streuquerschnitt für große Streuwinkel?
(6) Zeigen Sie für einen kugelsymmetrischen Potentialtopf (Tiefe V_0, Radius r_0), daß

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4}\frac{1}{|\vec{q}|^4}\left(r_0\cos(r_0|\vec{q}|) - \frac{\sin(r_0|\vec{q}|)}{|\vec{q}|}\right)^2 .$$

Wie verhält sich dieser Streuquerschnitt für große Energien?
(7) Diskutieren Sie das Verhalten von $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ in (3), (5) und (6) für kleine Energien, d.h. $kr_0 \ll 1$. Könnte man diese Potentiale mit langsamen Projektilen unterscheiden? Was haben diese Potentiale gemeinsam?
(8) Betrachten Sie das Coulombpotential einer Ladungsverteilung ρ, d.h.

$$V(\vec{x}) = Q\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|} .$$

Zeigen Sie, daß

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{32\pi^3m^2Q^2}{\hbar^4}\frac{1}{|\vec{q}|^4}\left|(\mathcal{F}\rho)(\vec{q})\right|^2 .$$

Man bezeichnet $|(\mathcal{F}\rho)(\vec{q})|^2$ als *Formfaktor*. Was ergibt sich für eine Punktladung?

[H1] *Pion-Proton-Streuung*:
(1) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ für die Überlagerung eines Yukawa- und eines Coulombpotentials:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\kappa}{4E\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}} + \frac{Q_1 Q_2}{4E\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \right)^2 .$$

(2) Was geschieht, wenn der Detektor in Vorwärtsrichtung ($\vartheta = 0$) steht?
(3) Vergleichen Sie die Größe der drei Beiträge (Coulombpotential, Yukawapotential, Interferenzterm) in $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ für $\sin\frac{\vartheta}{2} > 0.1$, d.h. etwas weg von der Vorwärtsrichtung. Verwenden Sie dabei für die Konstanten die Werte $\kappa = 0.07\hbar c$, $r_0 = 1.4[\mathrm{fm}]$, $mc^2 = 140[\mathrm{MeV}]$, $Q_1 = Q_2 = e$. Skizzieren Sie $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ als Funktion von E. (5 P.)

[H2] *Gültigkeitskriterium für die Bornsche Näherung*: Als einfacher Test für die Güte der Bornschen Näherung kann z.B. die Streuwelle

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{x}) \equiv \psi_{\vec{k},\mathrm{Born}}(\vec{x}) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

an einem bestimmten Ort $\vec{x}_0$ im Wechselwirkungsbereich darauf untersucht werden, ob

$$\left|\varphi_{\vec{k}}(\vec{x}_0)\right| \ll \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right|$$

ist. Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens der Masse m am Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{wenn} \quad r < r_0\,, \\ 0 & \text{wenn} \quad r \geq r_0\,, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad V_0 > 0\,.$$

(1) Leiten Sie für $\vec{x}_0 = 0$ Bedingungen her, die für die Gültigkeit der Bornschen Näherung in den beiden Grenzfällen $|\vec{k}|r_0 \gg 1$ und $|\vec{k}|r_0 \ll 1$ erfüllt sein müssen. Hinweis: Die Bornsche Näherung ist die Lösung der Integralgleichung

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3x'\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\vec{k}||\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} V(\vec{x}')\psi_{\vec{k}}(\vec{x}')$$

in erster Ordnung in V.
(2) Ein anderes Kriterium besagt, daß die Bornsche Näherung eine gute Näherung ist, wenn der totale Wirkungsquerschnitt klein gegenüber dem geometrischen Streuquerschnitt ist, d.h. $\sigma \ll 4\pi r_0^2$. Für welche Werte von V_0 ist für niedrige Energien, d.h. $|\vec{k}|r_0 \ll 1$, nach diesem Kriterium die Bornsche Näherung noch akzeptabel?
(3) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt σ in der Bornschen Näherung als Funktion von $\gamma \equiv kr_0$ ohne Einschränkung an den Wert von γ. Skizzieren Sie $\sigma(\gamma)$. Wie verhält sich σ für sehr große Energien, d.h. für $\gamma \gg 1$? (5 P.)